

1. 一個雙子星系統是由兩顆質量各為 m_1 和 m_2 的星球組成，它們繞其系統質心以半徑 r_1 和 r_2 做圓周運動。

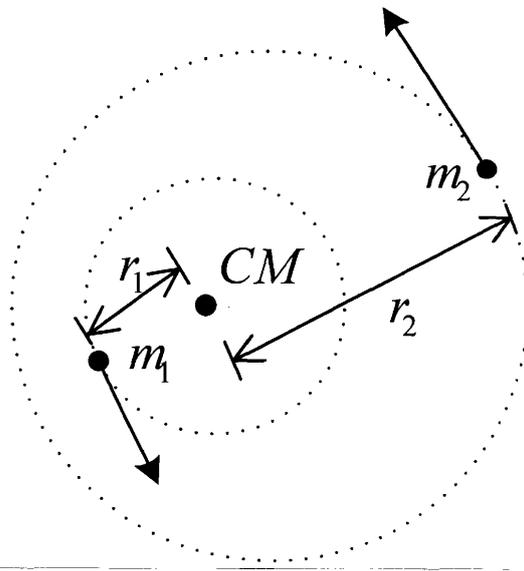
(a)質心作

- (1)圓周運動，
- (2)直線運動，
- (3)靜止不動，
- (4)其他運動，

就你的答案說明其理由。

(b)試證刻卜勒第三定律可以寫成下式

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}(r_1 + r_2)^3.$$



【此題答案由此開始作答】

一、(a)質心靜止不動

理由： $\vec{F} = 0$ 或動量守恆

$$(b) \vec{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2} = \frac{m_1v_1^2}{r_1}$$

$$T = \frac{2\pi r_1}{v_1} = \frac{2\pi r_1(r_1+r_2)}{\sqrt{Gm_2r_1}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r_1(r_1+r_2)^2}{Gm_2} \dots (1)$$

質心(動量守恆)

$$m_1 r_1 - m_2 r_2 = 0$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

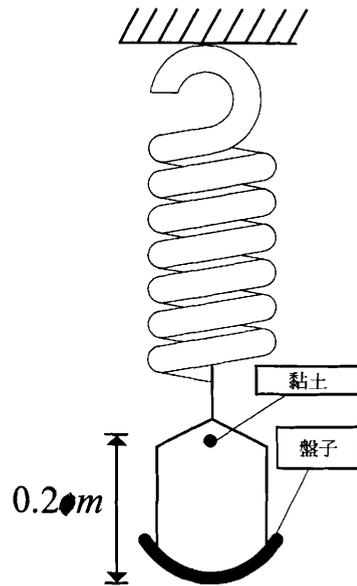
$$\frac{m_1}{m_2} + 1 = \frac{r_2}{r_1} + 1$$

$$\frac{m_1 + m_2}{m_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_1}$$

$$\therefore \frac{r_1}{m_2} = \frac{r_1 + r_2}{m_1 + m_2} \quad \text{代入第(1)式}$$

$$\text{得 } T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}(r_1 + r_2)^3$$

(二)、一個盤子質量為 0.3kg 懸掛在某彈簧下時彈簧被拉長 0.1m。有一質量為 0.1kg 的黏土由高 0.2m 的高度自靜止狀態掉落到盤子上，如圖所示。求盤子再向下移動的最大位移。(重力加速度 $g=10\text{m/s}^2$)



【此題答案由此開始作答】

$$\text{二、 } F = kx$$

$$mg = kx$$

$$\therefore k = \frac{(0.3)(10)}{0.1} = 30(\text{N/m})$$

$$v^2 = 2gh$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(10)(0.2)} = 2(\text{m/s})$$

動量守恆

$$mv = (m + M)V$$

$$\therefore V = \frac{0.1(2)}{0.3 + 0.1} = \frac{1}{2}(\text{m/s})$$

$$\text{力學能守恆 } \frac{1}{2}(m + M)V^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(x + A)^2 - (m + M)gA$$

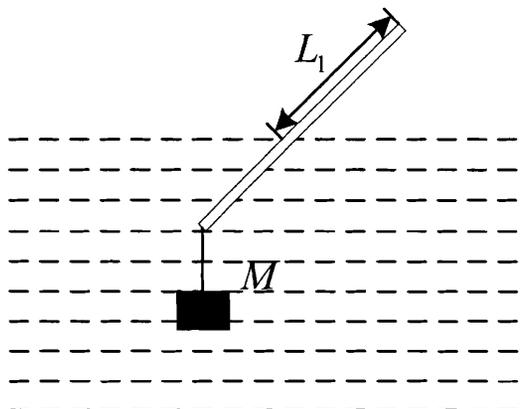
$$\frac{1}{2}(0.4)(0.5)^2 + \frac{1}{2}(30)(0.1)^2 = \frac{1}{2}(30)(0.1 + A)^2 - (0.4)(10)A$$

$$15A^2 - A - 0.05 = 0$$

$$A = \frac{1 \pm 2}{30} (\text{負值不符合})$$

$$\therefore A = 0.1\text{m}$$

3. 質量為 m ，長度為 L ，半徑為 r 的均勻浮標。浮標底端用一輕繩綁一質量為 M 的鉛錘，浸入某液體中，浮標露出液面的長度為 L_1 ，如圖所示。求液體的密度。



【此題答案由此開始作答】

三、以浮標底端當參考點平衡 力矩=0

$$\tau = B \left(\frac{L - L_1}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) - W \left(\frac{L}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = 0$$

$$B \left(\frac{L - L_1}{2} \right) \cos \theta - W \left(\frac{L}{2} \right) \cos \theta = 0$$

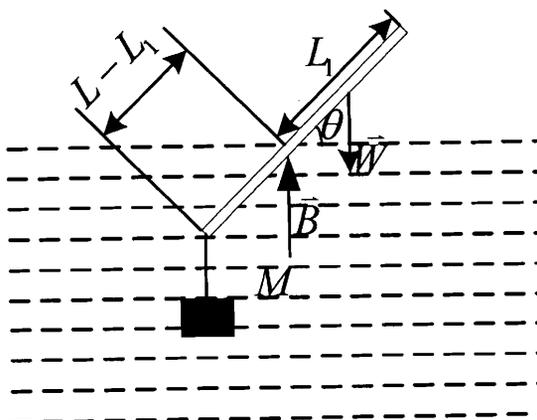
浮標沉在液面下所受的浮力

$$B = \rho_l \pi r^2 (L - L_1) g \quad , \quad \rho_l : \text{液體密度}$$

$$W = mg = \rho \pi r^2 L g$$

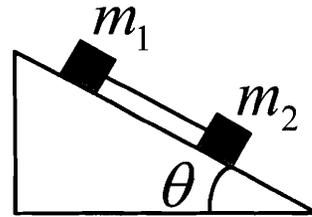
$$\rho_l \pi r^2 (L - L_1) \frac{L - L_1}{2} g = \rho \pi r^2 L \frac{L}{2} g$$

$$\therefore \rho_l = \rho \frac{L^2}{(L - L_1)^2} = \frac{m}{\pi r^2 L} \frac{L^2}{(L - L_1)^2} = \frac{mL}{\pi r^2 (L - L_1)^2}$$



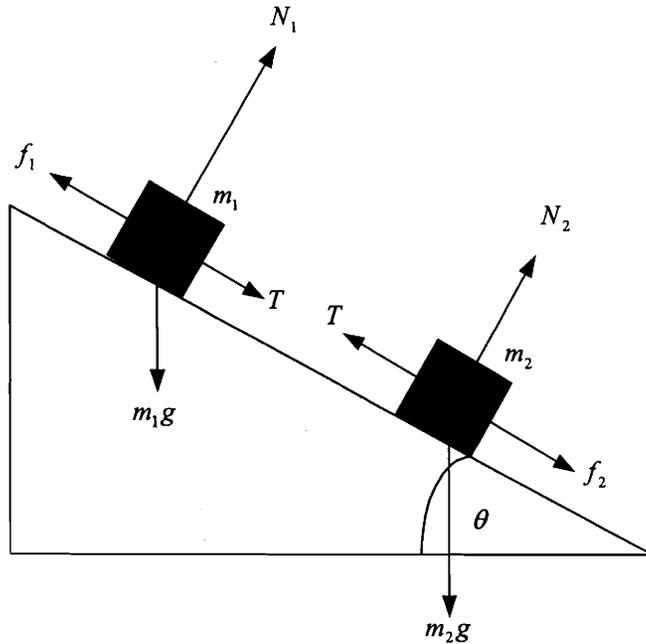
4. 二物體質量為 $m_1 = 1.65\text{kg}$ 及 $m_2 = 30.30\text{kg}$ 以無質量之棒連結 (m_1 在上方)，棒與斜面平行，由 m_1 跟 m_2 沿斜面下滑，如圖所示。斜面之傾角為 $\theta = 30^\circ$ ， m_1 與斜面間之動摩擦係數為 $\mu_1 = 0.226$ ； m_2 與斜面間之動摩擦係數為 $\mu_2 = 0.113$ 。求

- (a) m_1 與 m_2 間棒之張力。
- (b) 兩物共有之加速度。
- (c) 若 m_1 與 m_2 對調則(a)與(b)之答案是否相等?



【此題答案由此開始作答】

四、



如圖每物沿斜面之受力情形

For m_1 :

$$T + m_1 g \sin \theta - f = m_1 a$$

$$T = \mu_1 m_1 g \cos \theta + m_1 a - m_1 g \sin \theta \dots \dots (1)$$

For m_2 :

$$m_2 g \sin \theta - T - f_2 = m_2 a$$

$$T = m_2 g \sin \theta - \mu_2 m_2 g \cos \theta - m_2 a \dots \dots (2)$$

(a) $(1) \times m_2 + (2) \times m_1$ 得

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\mu_1 - \mu_2) g \cos \theta$$

$$= \frac{1.65 \times 3.30}{1.65 + 3.30} (0.226 - 0.113) \times 9.8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 1.05 \text{ nt} \quad (1.5)$$

(b) $a = g \sin \theta - \frac{g \cos \theta}{m_1 + m_2} (\mu_2 m_2 + \mu_1 m_1)$

$$= 9.8 \times \frac{1}{2} - \frac{9.8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{1.65 + 3.30} (0.226 \times 1.65 + 0.113 \times 0.3)$$

$$= 3.62 \quad (3.4)$$

(c) 如 m_1 在前， m_2 在後，上列二方程式亦同，故答案相同，唯此時棒所受之力為壓力。

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\mu_2 - \mu_1) g \cos \theta < 0$$

5. 一盒置於秤上，調整秤之讀數使為零。石子(質量 = m)連續由盒底之上 h 高處落入盒內，每秒落下之石子數為 μ ，若石子與盒為完全非彈性碰撞，求石子開始落下 t 秒後秤的讀數。

【此題答案由此開始作答】

五、

X 為秤的指數，盒中小球受三力

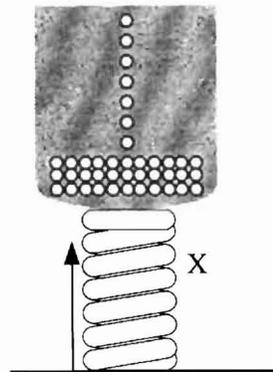
(1) x 向上

(2) 球重向下 $mg \times \mu \times t = \mu mgt$

(3) 落下中小球所施向下之力 F

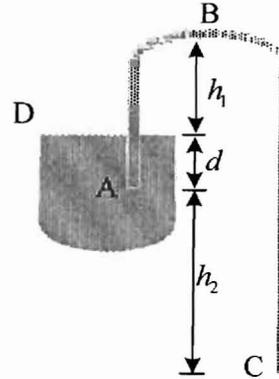
$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{\mu \cdot \Delta t m v}{\Delta t} = \mu m v = \mu m \sqrt{2gh}$$

$$\Rightarrow x = \mu mgt + \mu m \sqrt{2gh} = \mu m(gt + \sqrt{2gh})$$



6. 虹吸管乃用於吸取不能傾斜之容器中液體之裝置。操作方式如圖所示。管中先充滿液體後，液體便可流出容器，令液體密度為 ρ ，黏滯亦可忽略。(大氣壓力為 P_0)

- 甲、從 C 點流出之液體流速為何?
 乙、B 點最高處之壓力為何?
 丙、 h_1 最高多少時吸管仍可工作?



【此題答案由此開始作答】

六、

- (a) 液面 D-C 之流線

$$P_c + \frac{1}{2} \rho V_c^2 + \rho g h_c = P_D + \frac{1}{2} \rho V_D^2 + \rho g h_D$$

$$\text{令 } V_D = 0 \text{ 且 } P_c = P_D = P_0 \text{ (大氣壓力)}$$

$$V_c^2 = 2g(h_D - h_c) = 2g(h_2 + d)$$

$$V_c = \sqrt{2g(h_2 + d)}$$

- (b) B → C 之流線

$$P_B + \frac{1}{2} \rho V_B^2 + \rho g h_B = P_c + \frac{1}{2} \rho V_c^2 + \rho g h_c$$

$$\text{今 } V_B = V_c \quad P_c = P_0$$

$$P_B = P_c + \rho g(h_c - h_B) = P_0 - \rho g(h_1 + d + h_2)$$

- (c) $P_B = 0$ 時 h 為極大值

$$P_0 - \rho g(h_{1\max} + d + h_2) = 0$$

$$h_{1\max} = \frac{P_0}{\rho g} - d - h_2 \leftarrow \text{超過此值便流不出水來}$$

