

98 學年度高級中學自然學科競賽第 10 區複賽

物理科筆試參考解

《第一題》

水管在半圓區域受水的壓力

$$2PA = 2P\pi r^2$$

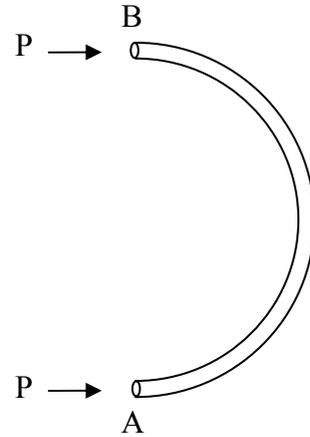
(a) 經過 Δt 時間進入 A 端的水動量為 $v\Delta m$

$$\Delta m = \rho\pi r^2 v\Delta t$$

$$\text{水的切線速率 } v = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\rho\pi r^2} = \frac{I}{\rho\pi r^2}$$

水流轉向，水管受向右的力

$$= 2v \frac{\Delta m}{\Delta t} = 2Iv = \frac{2I^2}{\rho\pi r^2}$$

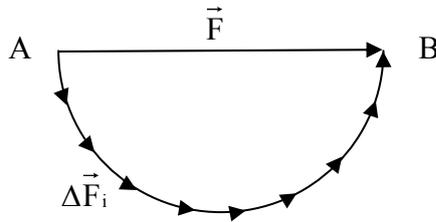
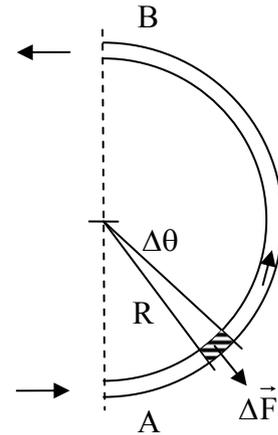


(b) $\Delta\theta$ 區域水的質量 $\Delta m = R\rho\pi r^2\Delta\theta$

$$\text{受向心力 } \frac{\Delta m v^2}{R}$$

水管受力向外為 $\Delta\vec{F}_i$

$$\text{由 A 到 B 水管受力 } \vec{F} = \sum_i \Delta\vec{F}_i$$

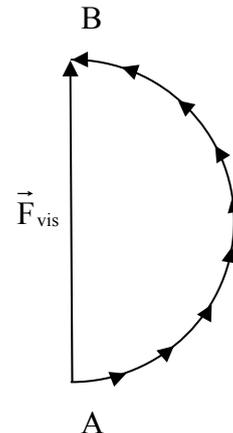


$$\frac{|\vec{F}|}{\sum_i |\Delta\vec{F}_i|} = \frac{2R}{\pi R} = \frac{2}{\pi}$$

$$F = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{mv^2}{R} = \frac{2v^2}{\pi R} \cdot \rho\pi r^2 \cdot \pi R$$

$$= 2\rho\pi r^2 v^2 = 2Iv$$

(c) 若考慮水的黏滯力，其合力向上



$$\frac{|\vec{F}_{\text{vis}}|}{\sum_i |\Delta \vec{F}_{\text{vis}}|} = \frac{2}{\pi}$$

此時在 A 端的水壓力必須稍大於在 B 端的水壓力

《第二題》

若彈簧自然長度 l 均勻伸長，總伸長長度 y

$$F = ky = kl \cdot \frac{y}{l}$$

彈簧上頭一段自然長度 Δx ，伸長長度 Δy

$$\text{則力} = kl \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

取一座標原點在彈簧尾端，隨彈簧加速，彈簧上一點在未加速時位於 x 。

則加速時， x 點須對彈簧的後段施力

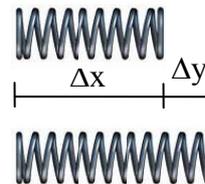
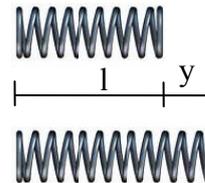
$$F(x) = m(x)a = Ma \frac{x}{l}$$

$$\text{又 } F(x) = kl \frac{\Delta y}{\Delta x} \Big|_x$$

$$kl \frac{\Delta y}{\Delta x} \Big|_x = Ma \frac{x}{l}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \Big|_x = \frac{Ma}{kl^2} x$$

$$\text{故 } y(x) = \frac{Ma}{2kl^2} x^2 \quad y(l) = \frac{Ma}{2k}$$

$$\text{彈簧總長度為 } l + \frac{Ma}{2k}$$



《第三題》

(a)

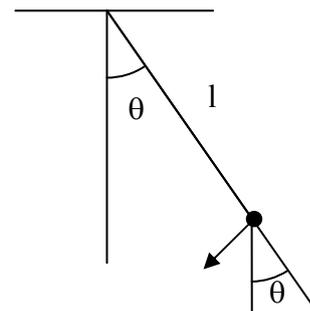
m_i 是「抵抗」外力所引起運動狀態改變的能力

m_g 則是「產生」力的能力

(b)

$$-m_g g \sin \theta = m_i a = m_i l \ddot{\theta}$$

$$\therefore \theta < 1$$



$$\Rightarrow -m_g g \theta = m_i l \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m_i l}{m_g g}}$$

(c)

擺錘為一空球，可塞不同物質，或同一物質但不同量

$\Rightarrow m_i$ 與 m_g 為一線性關係。

《第四題》

(a)

將此厚球殼分割成很多極薄均勻球殼。已知一極薄之均勻球殼對球外一點 P 所造成的重力，可視為將其總質量集中在球心。利用重疊原理可知一有厚度之均勻球殼，該球殼對殼外所造成的重力，仍可視為將其總質量集中在球殼中心。

(b)

考慮小立體角 Ω_i 範圍球殼對球殼內部一點 P 之重力

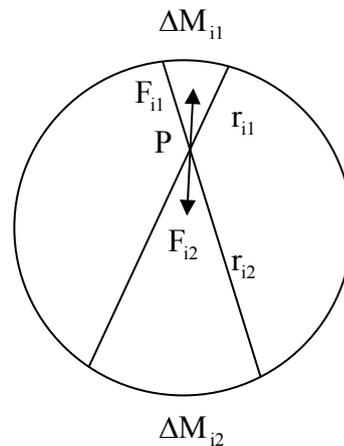
$$\frac{\Delta M_{i1}}{\Delta M_{i2}} \cong \frac{r_{i1}^2}{r_{i2}^2}$$

$$\Rightarrow F_{i1} = \frac{G \Delta M_{i1} m}{r_{i1}^2} = \frac{G \Delta M_{i2} m}{r_{i2}^2} = F_{i2} \quad (m \text{ 為 } P \text{ 點物}$$

體之質量)

$$\Rightarrow \vec{F}_i = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0$$



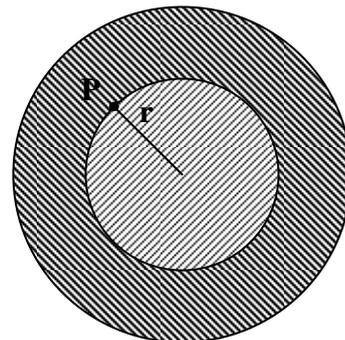
(c)

因球殼內部重力為 0

所以 P 點所受到的淨力為半徑 r 所圍球體對 P 點之重力 (r 為 P 點到球心的距離)

$$\Rightarrow F = \frac{G \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 \cdot \rho \cdot m}{r^2} \propto r$$

為簡諧運動



(d)

$$\frac{F_1}{r_1} = \frac{F}{r} = k = G \frac{4\pi}{3} \rho m$$

$$\Rightarrow F_1 \propto r_1$$

亦為簡諧運動，其旅行時間 t_{AB} 無論 A、B 的位置如何均相同。

$$t_{AB} = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{m}{K}} = \pi \sqrt{\frac{m}{G \frac{4\pi}{3} \rho m}} = \sqrt{\frac{3\pi}{4G\rho}}$$

