98 學年度高級中學自然學科競賽第 8 區複賽

物理科筆試參考解

《第一題》

$(m+M)g - T = (m+M)a$

$T - Mg = Ma$

$\therefore mg = (m+2M)a$

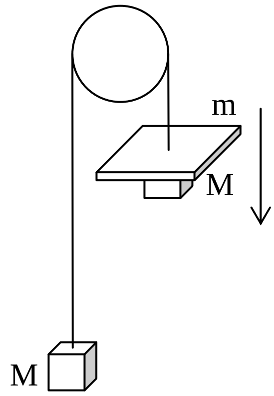
$\therefore a = \dfrac{m}{m+2M} g$

$v^2 = 2aH = 2(\dfrac{m}{m+2M})gH$

$vt = D$

$\therefore 2(\dfrac{m}{m+2M})gH = \dfrac{D^2}{t^2}$

$\therefore g = \dfrac{(m+2M)D^2}{2mHt^2} = \dfrac{(0.5+2)\times 4}{2\times 0.5\times 0.5\times 1.5^2} = \dfrac{80}{9} = 8.89\ (\mathrm{m/s^2})$



《第二題》

$v_1^2 = 2gh$ ， $t_1 = \dfrac{v_1}{g} = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

$v_2 = -0.5v_1 = -e\sqrt{2gh}$ ， $t_2 = 2\times\dfrac{e\sqrt{2gh}}{g} = 2e\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ (因數 2 是此路徑來回 2 次)

$v_3 = -0.5v_2 = -e^2\sqrt{2gh}$ ， $t_3 = 2\times e^2\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

$t = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots$

$= \sqrt{\dfrac{2h}{g}} + 2e\sqrt{\dfrac{2h}{g}}(\dfrac{1}{1-e}) = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} \times \dfrac{1+e}{1-e} = \sqrt{\dfrac{2\times 20}{10}} \times \dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 6\ (\mathrm{s})$

《第三題》

(a)

$t_R' = t_L'$

$x_L = \gamma(x_L' + vt_L') \cdots\cdots\cdots(1)$

$x_R = \gamma(x_R' + vt_R') \cdots\cdots\cdots(2)$

(2)-(1)

$x_R - x_L = \gamma(x_R' - x_L')$

$L = \gamma L'$

$\therefore L' = \frac{1}{\gamma} L$

(b)

$t_L' = \gamma(t_L - \frac{vx_L}{c^2})$

$t_R' = \gamma(t_R - \frac{vx_R}{c^2})$

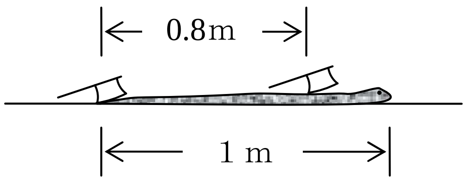
$t_R' = t_L'$

$\therefore \Delta t = \frac{v(x_R - x_L)}{c^2} = \frac{vL}{c^2}$

(c)

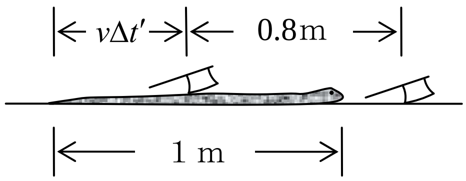
蛇看兩斧頭的距離為

$L' = \frac{L}{\gamma}$ ， $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{5}{4}$



$\therefore L' = \frac{1}{\frac{5}{4}} = 0.8\,(m)$

蛇不動，兩斧頭以 $v = 0.6c$ 向左運動，由(b)之右斧頭砍下的時間早於左斧頭砍下的時間



$t_R'\text{-}t_L' = -\frac{\gamma v(x_R\text{-}x_L)}{c^2}$

$\Delta t' = -\frac{\gamma vL}{c^2}$

所以右斧頭砍下與蛇尾的相對位置

$0.8 + v\Delta t' = 1.25$

$1.25 - 1 = 0.25$ (m)

蛇頭在右斧頭左邊 0.25 m 處

《第四題》

利用角動量守恆

細棒的角動量 $\equiv \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\vec{r_i}\times\vec{P_i}$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\vec{r_i}\times(m_i\vec{v_i})$$

$$= \lim_{N\to\infty}(\sum_{i=1}^{N}\frac{iL}{N}\cdot\frac{M}{N}\cdot\frac{iL}{N}\cdot\omega)$$

$$= \lim_{N\to\infty}(\frac{ML^2\omega}{N^3}\cdot\sum_{i=1}^{N}i^2)$$

$$= \lim_{N\to\infty}[ML^2\omega\cdot\frac{1}{N^3}\cdot\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}]$$

$= \frac{1}{3}ML^2\omega$ ，ω 為角速度

動物的角動量 $= l\cdot m\cdot l\cdot\omega$

$$= ml^2\omega$$

$$\therefore (\frac{ML^2}{3}+ml_1^2)\omega_1 = (\frac{ML^2}{3}+ml_2^2)\omega_2$$

M 為細棒質量，m 為動物質量，L 為細棒長度，$l_1 = L$ 為動物起始位置到旋轉軸之距離；$l_2 = L/2$ 為細棒中心到旋轉軸之距離，ω_1 為動物在起始位置情況下系統的角速度；ω_2 為動物移動至細棒中心時系統的角速度。

$$\therefore (\frac{1\times 2^2}{3}+m\times 2^2)\times 0.25 = (\frac{1\times 2^2}{3}+m\times 1^2)\times\omega_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}+m = (\frac{4}{3}+m)\omega_2 \cdots\cdots\cdots(1)$$

動物移動至細棒中心時恰好被甩開，則此時動物旋轉所需之向心力=摩擦力。

$$\therefore ml_2\omega_2^2 = \mu mg$$

$$\Rightarrow \omega_2^2 = \frac{\mu g}{l_2} = \frac{0.012\times 10}{1} = 0.12$$

$\Rightarrow \omega_2 = 0.35$ (徑/秒) 代入(1)

$$\therefore \frac{1}{3}+m=(\frac{4}{3}+m)\times 0.35$$

$$\Rightarrow m=\frac{\frac{4}{3}\times 0.35-\frac{1}{3}}{1-0.35}=0.21\,(\text{kg})$$

《第五題》

平衡時，系統底部的壓力相等

$$\therefore \frac{m_1 g}{A_1}+h_1\rho g=\frac{m_2 g}{A_2}+h_2\rho g=\frac{m_3 g}{A_3}+h_3\rho g$$ ， ρ 為液體密度

$$\Rightarrow \begin{cases} h_3-h_2=(\frac{m_2}{A_2}-\frac{m_3}{A_3})\times\frac{1}{\rho} \\ h_2-h_1=(\frac{m_1}{A_1}-\frac{m_2}{A_2})\times\frac{1}{\rho} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (h_3-h_2):(h_2-h_1)=(\frac{m_2}{A_2}-\frac{m_3}{A_3}):(\frac{m_1}{A_1}-\frac{m_2}{A_2})$$

$\because (h_3-h_2):(h_2-h_1)=1:1$ 且 $A_1:A_2:A_3=4:1:2$

$$\therefore (\frac{m_2}{1}-\frac{m_3}{2}):(\frac{m_1}{4}-\frac{m_2}{1})=1:1$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{4}-2m_2+\frac{m_3}{2}=0$$

$$\Rightarrow m_1-8m_2+2m_3=0\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 m_2 與 m_3 砝碼位置對調，得

$$(h_3'-h_2'):(h_2'-h_1')=(+1):(-1)$$

$$\therefore (\frac{m_3}{1}-\frac{m_2}{2}):(\frac{m_1}{4}-\frac{m_3}{1})=(+1):(-1)$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{4}-\frac{m_2}{2}=0$$

$$\Rightarrow m_1=2m_2\cdots\cdots\cdots(2)$$

聯立(1)(2)得

$$m_1:m_2:m_3=2:1:3$$