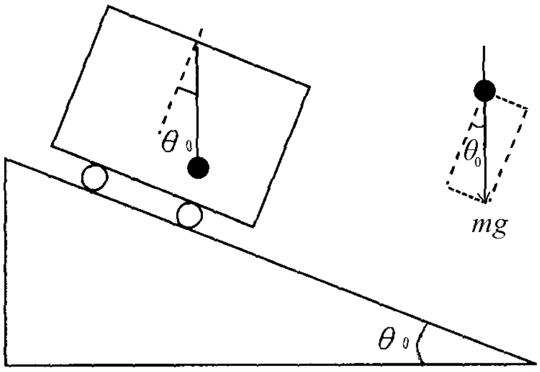
九十八學年度高雄市高級中學自然學科競賽複賽物理科筆試參考解

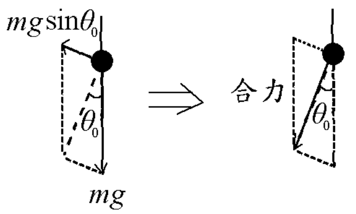
【第一題】

(1) 時間 $t = 0$ 至 $t = a$ 這段時間車子靜置於斜坡上，球只受到 mg 的力作用



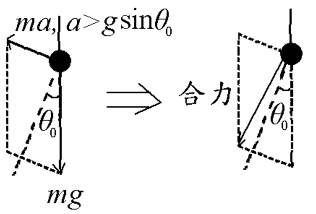
故繩子與垂直車子天花板法線之夾角 θ 一直保持在 θ_0

(2) 時間 $t = a$ 至 $t = b$ 這段時間車子自由下滑，球受到 mg 及 $mg\sin\theta_0$ 的力作用



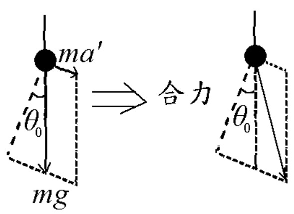
合力方向通過垂直車子天花板法線，故 θ 一直保持在 0

(3) 時間 $t = b$ 至 $t = c$ 這段時間踩到油門的車子向下以大於 $g\sin\theta_0$ 加速，球受到 mg 及 ma 的力作用，且 $ma > mg\sin\theta_0$



合力方向如上圖所示，故 θ 一直保持在小於 0 的某固定值

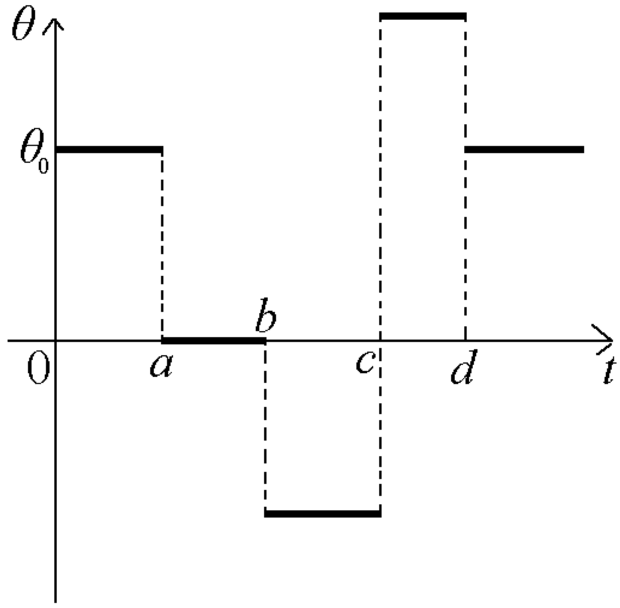
(4) 時間 $t = c$ 至 $t = d$ 這段時間踩到煞車的車子向下減速，球受到 mg 及 ma' 的力作用



合力方向如上圖所示，故 θ 一直保持在大於 θ_0 的某固定值

(5) 時間$t = d$之後車子靜置在斜坡上，球的受力情形與$t = 0$ 至$t = a$相同，θ 一直保持在θ_0

畫出 $t = 0$ 至 $t = d$ 之 t-θ 圖如下：



【第二題】

(a) 一開始時 $Mg = m\dfrac{v^2}{r} = mr\omega^2$ ……………………式(1)

t 時間後 $\dfrac{M}{27}g = m\dfrac{v'^2}{r'} = mr'\omega'^2$ …………………式(2)

角動量守恆 $I\omega = I'\omega' \Rightarrow mr^2\omega = mr'^2\omega'$ ………式(3)

由式(3)$r^2\omega = r'^2\omega'$

$$r^4\omega^2 = r'^4\omega'^2 \Rightarrow \omega'^2 = \frac{r^4}{r'^4}\omega^2 \text{代入式(2)}$$

$$\frac{M}{27}g = mr'\frac{r^4}{r'^4}\omega^2 = m\frac{r^4}{r'^3}\omega^2$$

式(1)代入 $\Rightarrow \dfrac{1}{27}mr\omega^2 = m\dfrac{r^4}{r'^3}\omega^2 \Rightarrow \dfrac{1}{27} = \dfrac{r^3}{r'^3}$

$\therefore \dfrac{1}{3} = \dfrac{r}{r'} \Rightarrow r' = 3r$

故 r 的平均變化率 $= \dfrac{r' - r}{t} = \dfrac{3r - r}{t} = \dfrac{2r}{t}$

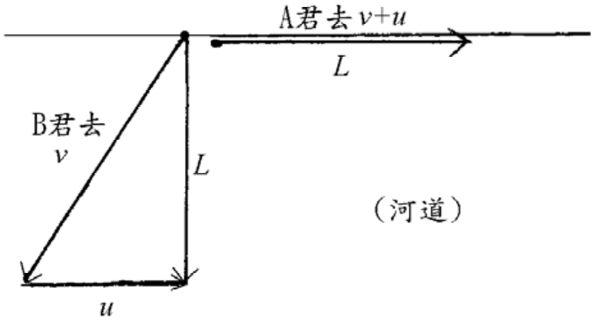
(b) 將 $r' = 3r$ 代入式(3)

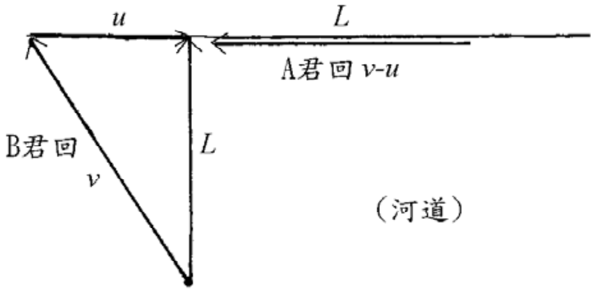
$r^2\omega = (3r)^2\omega' = 9r^2\omega' \Rightarrow \omega' = \dfrac{\omega}{9}$

故質點的平均加速度 $\bar{a} = \dfrac{r'\omega' - r\omega}{t} = \dfrac{3r\dfrac{\omega}{9} - r\omega}{t} = \dfrac{-2r\omega}{3t} = \dfrac{-2v}{3t}$

【第三題】

畫出 A 君及 B 君游泳來回的路徑：





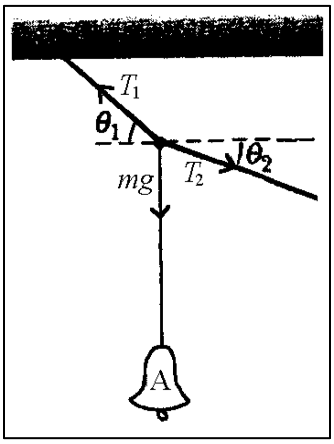
A 君所花費的時間 $t_A = \dfrac{L}{v+u} + \dfrac{L}{v-u} = \dfrac{2Lv}{v^2 - u^2}$

B 君所花費的時間 $t_B = \dfrac{L}{\sqrt{v^2 - u^2}} + \dfrac{L}{\sqrt{v^2 - u^2}} = \dfrac{2L\sqrt{v^2 - u^2}}{v^2 - u^2}$

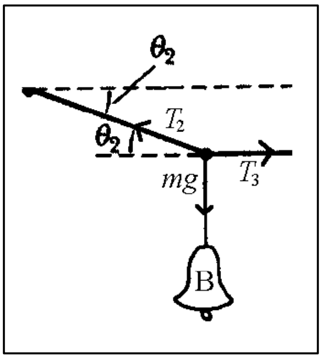
$t_A > t_B$ 故 B 君先回到原處

【第四題】

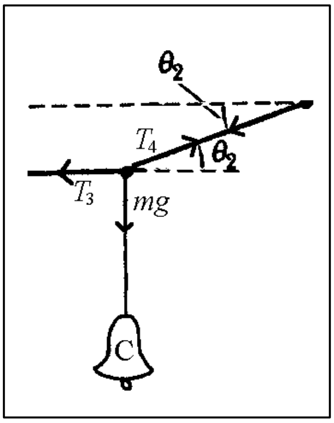
(a)



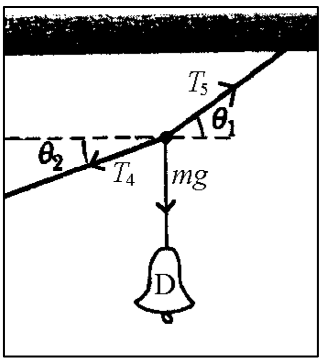
風鈴 A：$\begin{cases} T_1\cos\theta_1 = T_2\cos\theta_2 \cdots\cdots\cdots\cdots \text{式(1)} \\ T_1\sin\theta_1 = T_2\sin\theta_2 + mg \cdots\cdots \text{式(2)} \end{cases}$



風鈴 B：$\begin{cases} T_2\cos\theta_2 = T_3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{式(3)} \\ T_2\sin\theta_2 = mg \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{式(4)} \end{cases}$



風鈴 C：$\begin{cases} T_4\cos\theta_2 = T_3 \\ T_4\sin\theta_2 = mg \end{cases}$



風鈴 D：$\begin{cases} T_5\cos\theta_1 = T_4\cos\theta_2 \\ T_5\sin\theta_1 = T_4\sin\theta_2 + mg \end{cases}$

(b)

$$\frac{式(2)}{式(1)} \Rightarrow \tan\theta_1 = \frac{T_2\sin\theta_2 + mg}{T_2\cos\theta_2} = \tan\theta_2 + \frac{mg}{T_2\cos\theta_2}$$

式(4)代入得： $\tan\theta_1 = \tan\theta_2 + \frac{T_2\sin\theta_2}{T_2\cos\theta_2} = \tan\theta_2 + \tan\theta_2 = 2\tan\theta_2$

所以θ_1與θ_2之關係式為$\theta_1 = \tan^{-1}(2\tan\theta_2)$ 或$\theta_2 = \tan^{-1}(\tan\theta_1 / 2)$

(c)

由風鈴B及風鈴C之運動方程式得$T_4=T_2$

由風鈴A及風鈴D之運動方程式得$T_5=T_1$

也就是左右對稱

所以求各繩之張力只要把風鈴 A 及風鈴 B 之四式聯立方程式解出即可

整理結果後得各繩間之張力為

$$T_1 = T_5 = \frac{2mg}{\sin\theta_1} \text{，} T_2 = T_4 = \frac{mg}{\sin(\tan^{-1}(\frac{\tan\theta_1}{2}))} \text{，} T_3 = \frac{2mg}{\tan\theta_1}$$

或者更進一步配合各式關係將T_2及T_4計算成其他表達為

$$T_2 = T_4 = mg\sqrt{\frac{4}{\sin^2\theta_1} - 3} \text{或} mg\sqrt{4\csc^2\theta_1 - 3} \text{或} \frac{\sqrt{1+3\cos^2\theta_1}}{\sin\theta_1} \text{或} mg\sqrt{4\cot^2\theta_1 + 1} \text{或} mg\frac{\sqrt{4+\tan^2\theta_1}}{\tan\theta_1}$$