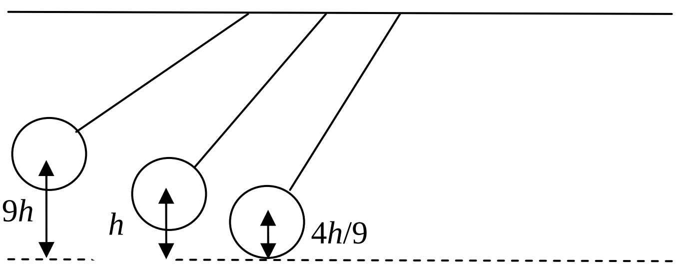
一百學年度高級中學自然學科競賽第8區複賽物理科筆試參考解

【第一題】



【參考解】

因為擺動可近似於簡諧運動，所以週期只與擺長有關，因此三球在同時釋放後，幾乎同時到達最低點。因為 $mgh=\frac{1}{2}mv^2$，$v=\sqrt{2gh}$，所以三球到達最低點之速度分別為 $v_m=3\sqrt{2gh}$、$v_{3m}=\sqrt{2gh}$、$v_{9m}=\frac{2}{3}\sqrt{2gh}$。

利用質心速度定義：

$$V_{cm}=(m_1v_1+m_2v_2)/(m_1+m_2)$$

所以相對於質心的速度為 $u_1=v_1-V_{cm}$，$u_2=v_2-V_{cm}$，再加上相對於質心的速度碰撞前後差一負號 $u_1'=-u_1$，$u_2'=-u_2$ 及 $u_1'=v_1'-V_{cm}$，$u_2'=v_2'-V_{cm}$，我們可以得到

$v_1'=((m_1-m_2)v_1+2m_2v_2)/(m_1+m_2)$及 $v_2'=((m_2-m_1)v_2+2m_1v_1)/(m_1+m_2)$。

因為碰撞順序是左側球先撞中間球，中間球再撞右側球。所以

(1) 左側球第一次碰撞中間球後速度是

$$v_m'=((m-3m)\times 3\sqrt{2gh}+6m\sqrt{2gh})/(m+3m)=0 \#$$

(2) 中間球被撞後速度為

$$v_{3m}'=((3m-m)\sqrt{2gh}+2m\times 3\sqrt{2gh})/(m+3m)=2\sqrt{2gh}$$

接下來中間球第一次碰撞右側球後速度是

$$v_{3m}''=((3m-9m)\times 2\sqrt{2gh}+18m\times\frac{2}{3}\sqrt{2gh})/(3m+9m)=0 \#$$

(3) 右側球被撞後之速度為

$$v_{9m}'=((9m-3m)\times\frac{2}{3}\sqrt{2gh}+6m\times 2\sqrt{2gh})/(3m+9m)=\frac{4}{3}\sqrt{2gh}$$

所以右側球被撞後可達到之最大高度 H 為

$$9m\,(\frac{4}{3}\sqrt{2gh})^2/2=9mgH \Rightarrow H=\frac{16}{9}h \#$$

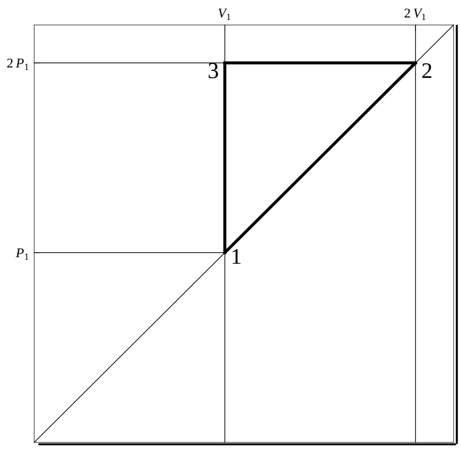
【第二題】
【參考解】
因為氣體是 1 摩耳，n=1。在 1-2 過程中，$T = aV^2$，所以

$$P = \frac{RaV^2}{V} = RaV \propto V \text{ 。}$$

又因為 $T_2 = 4T_1$，所以 $V_2 = 2V_1$ 且 $P_2 = 2P_1$。在 2-3 過程中，$T = bV$，所以

$$P = \frac{RbV}{V} = Rb = const. \text{ 。}$$

所以 $P_3 = P_2 = 2P_1$ 且 $V_3 = V_1$。因此可畫出此循環的 $P-V$ 圖:



(1) 總能 $E = \frac{3}{2}PV = \frac{3}{2}nRT$，所以 1-2 過程總能增加量是

$$\Delta E_{1\to 2} = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) = \frac{9}{2}RT_1$$

氣體對環境作功

$$\Delta W_{1\to 2} = \frac{(P_1 + 2P_1)V_1}{2} = \frac{3}{2}P_1V_1 = \frac{3}{2}RT_1$$

$\because \frac{9}{2}RT_1 / \frac{3}{2}RT_1 = 3$，此氣體的總能增加量是其對環境作功的 3 倍。

(2) 在 2-3 的過程中，氣體對環境作功

$$\Delta W_{2\to 3} = 2P_1 \times (-V_1) = -2P_1V_1 = -2RT_1$$

在 3-1 的過程中，氣體對環境作功

$$\Delta W_{3\to 1} = 2P_1 \times (0) = 0$$

此氣體作完一次循環後，對環境所作的淨功是

$$\Delta W_{\text{cycle}} = \Delta W_{1\to 2} + \Delta W_{2\to 3} + \Delta W_{3\to 1} = \frac{3}{2}RT_1 - 2RT_1 = -\frac{1}{2}RT_1$$

$\because \left(-\frac{1}{2}\right)RT_1 / (-2)RT_1 = \frac{1}{4}$，所以此氣體作完一次循環後，對環境所作的淨功是在 2-3 的過程中所作功的 1/4。

【第三題】
【參考解】

(a) 令 r_1=0.00500m , r_2=0.0200m ,軸的切向速度和溜溜球的速度是相同的。

使用能量守恆，求溜溜球的速度

$$\Delta K=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr_2^2\right)\left(\frac{v^2}{r_1^2}\right)=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{4}m\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2v^2=-\Delta U=mgh$$

故

$$v=\sqrt{\frac{4gh}{2+(r_2/r_1)^2}}=\sqrt{\frac{4(9.8\text{m/s}^2)(1.00\text{m})}{2+\left(\frac{0.0200\text{m}}{0.00500\text{m}}\right)}}=\boxed{1.5\text{m/s}}$$

(b) 求溜溜球下降所需的時間

$$\Delta y=v_{\text{av}}\Delta t=\frac{1}{2}(v_{\text{fy}}+v_{\text{iy}})\Delta t=\frac{v}{2}\Delta t$$

故

$$\Delta t=\frac{2\Delta y}{v}=\frac{2(1.00\text{m})}{1.476\text{m/s}}=\boxed{1.36\text{s}}$$

【第四題】

【參考解】

考慮功，力，能量，和位移之間的關係。

(a) γ是表面的邊緣每單位長度的拉力所以$W = F\Delta s = \boxed{\gamma L \Delta s}$

(b) $W = \Delta E$ 且$\Delta A = L\Delta s$

故$\boxed{\Delta E = \gamma \Delta A}$，此處之$\Delta E$即表面能量的增加量

(c) $\gamma \Delta A = \Delta E \Rightarrow \gamma = \dfrac{\Delta E}{\Delta A}$，因此$\gamma$可以被看作是每單位面積的表面能

(d) $F\Delta s = \gamma L\Delta s \Rightarrow \dfrac{F}{L} = \gamma$，因此$\gamma$的單位為 N/m

$\gamma = \dfrac{\Delta E}{\Delta A}$，因此$\gamma$的單位為 J/m^2