

學術期刊
第 011 期
~混沌~

本期內容：
柯景元老師專訪
非線性動力學

柯景元老師專訪

口述 柯景元老師
紀錄 陳永源

Q 1：什麼是非線性雷射動力學？

柯景元老師：以雷射當做研究對象，研究非線性的現象及非線性效應，譬如說研究震盪的行為，研究週期性運動，你可能可以找力學系統(單擺)，有人不喜歡找單擺那他可以找 LC 電路，他也是一種震盪的行為，意思就是說你今天要研究某一個現象，但是你的系統只是一個想法而已，你的想法只是理論上的，但是你要如何建立實驗裝置，所以大家都做非線性，但是是什麼東西的非線性，有的人去做生物物理，有的人會去做經濟物理，像我就做雷射動力學，像何(明宗)老師就做腦波，像利老師的學生也有在做人體動力學、手眼協調的問題，這些都是，所以非線性是一種概稱，裡面的子領域很多。

像我們常常都知道四大力學：力學、電磁學、統計力學、量子力學這四大力學是大家公認的，但是像非線性動力學，那就是 1990 年以來才會比較熱一點，其實他早在 1967 年就開始發展了但是那時候還不受注目，他會不受注目的原因是因為數學上要解非線性的東西比較困難，所以才受限，一直到電腦普及了可以算很多東西，你可以用電腦幫你算，這時候就進展非常非常快，這是原因之一。

非線性動力學可以當作一種方法，有些問題古典無法處理，線性也沒辦法處理，所以大家去發展一些方法來處理不是線性的這一塊，一開始大家也不會灌給他一個領域的名稱叫做非線性動力學，是慢慢越做東西越多，累積足夠的基礎才冠他一個”非線性動力學”，所以他是提供我們一種研究方法，研究非線性現象的方法，隨著時間演進不同的新方法都開始驗變出來，所以這樣我們手上就有很多工具可以去處理很多不同的系統。

Q 2：在什麼時候開始對雷射感到興趣？

柯景元老師：這也是一種因緣際會啦，因為我老師是做光學的，所以我們以前跟一個日本老師合作，他的專長就是做雷射，所以我後來也是跑去做雷射，我以前碩士班博士班的研究基本上都是屬於電腦模擬的部分，都是在研究方法，不是在研究系統本身，就是研究發展一些新方法，去研究以前我們沒辦法研究的問題。

Q 3：老師你當初有想要出國唸書嗎？及對出國唸書的看法是？

柯景元老師：有！我先去當兵，當完兵在考托福 GRE，但是考的不好，我看我的獎學金就沒有希望了，連申請都沒申請，所以我想既然這樣子也沒關係阿，就留在國內就好了阿，現實阿，沒辦法阿，沒錢也沒辦法，但是回想起來有好有壞啦，但是當時我做那決定現在回想起來我可以接受，但是另外一種方式或許也可以，就是不管三七二十一過去在說，過去那邊你可以打工，大概就是這樣，就是要勇敢一點啦，坦白講就是這樣子，應該這樣講這和我的目標有關係，我又不是說非得出國不可，如果我這這樣我就去了，但是我的目標不是這樣子，所以我就選擇另外一種方式，因為我只是想做一些研究而已，做研究不限國內國外所以我覺得都可以阿，所以經濟上沒辦法我就留在國內就好了，所以你的決定會跟你的目標有關係阿。如果有想要出國的同學的話，不管是不是要出國啦，再做一些選擇的時候，有時候還是需要一些勇氣，因為妳們很年輕所以我覺得都沒關係，因為你們經的起犯錯，大不了一年之後從頭再來就好了。

Q 4：老師，像你物理這麼拿手，你的物理的 sence 是怎樣培養的？

柯景元老師：這個問題我沒有想過。不過我倒是可以提供你們一些讀物理會遇到的問題。上過我的課的人，我都跟他們說不要陷入數學的迷思，像你們在解決物理的問題時候，可能會遇到這個積分或者是這個數學怎解？然後一整個栽進數學裡。可是你忽略了你一開始要解決什麼？你的問題是什麼？我在大一的時候，也遇到這個問題，但是我很快的解決這個問題。印象中在大一的期中考左右，我在想這要怎麼算，可是過了這段時間就沒有栽進數學這個迷思了。因為我知道我算不出來是正常的，不必去在意他。也就是說像課本裡面的推導我就不去推倒他了，我就直接去看他的結果，去看他的物理意義，去將他的函數圖形畫出來，去詮釋這個物理的現象，這是我當初讀物理的情形。

Q 5：老師，你說讀物理的數學不好，感覺聽起來怪怪的。

柯景元老師：這樣說好了，你如果要做理論的話數學能力不好可能會說不過去，畢竟理論的推導跟數學脫離不了關係，這個能力是要磨練的。磨練到什麼地步呢？像我老師以前跟我們說的，磨練到數學推導從頭推到為沒有卡點，這種出神入化的感覺。但是實驗的話就不盡然了，實驗部份跟你的實驗技巧有關係，你為了證明他，你可能不用透過數學，用實驗的方式找到證據，找到現象，這也是另外一種的證明。其實你在算的過程中，腦海理想的還是物理問題，你要邊算邊想你今天的物理問題是什麼？你為什麼要這樣算？你大概要算出什麼樣的結果之類的。所有的重點，都要圍繞在你的物理問題。這樣才不會陷入數學的迷思。

而實驗想的是：你今天要量測什麼？你要用什麼工具量測？你需要哪些技巧？很多的物理量你可以算，但是你量不到。那這些物理量你只能從間接的證據去推測出你想要的物理量。像我現在做的雷射，我可以量電磁波或光的一些物理量，但是我不能量這一塊材料高能階的粒子有幾個？低能階的粒子有幾個？這是可以算的但是不能量的。但是我可以間接透過一些量測去得到這些數值。所以理論的世界，很自由很美好；但是實驗的世界，很真實。因為真實世界不美好，很多東西不是你想就怎樣，你必須要考慮很多種因素。不是說做理論的不好，而是說做理論的，最重要的是可以簡化一個現象，歸納這個現象的成因，可以抽出這個現象最精華的地方。最難能可貴的是，你可以藉由這套理論去預測出之後會發生什麼現象？然後就可以交給做實驗，去設計實驗把它整個展現出來，這是做理論重要的地方。只是理論超前實驗的不多，因為理論大多是天馬行空，大多是假的。在物理裡面，實驗超前理論的比較多，在我心中理論領先實驗的大概只有相對論和電磁波這兩套理論。當然可能還有其他的。做理論的可能不受限制，無拘無束；但是做實驗的可能因為儀器不夠經費不足，做起來綁手綁腳的。但是理論還是要跟實驗有所結合，你可能想到一個很完美的理論，但是實驗做出來跟你有所違背，雖然你的理論很先進，但是還是得放棄，因為跟現實世界不符合。我覺得這兩個做什麼都好，看個人的興趣在哪邊拉。做理論的大概需要一個腦袋，一張紙，一支筆頂多再加一台電腦，你可能半夜睡覺睡到一半，有什麼突發奇想，就可以立刻寫下來；或者是今天心情不好，開個車到墾丁泡泡海水，邊寫理論，就像費曼一樣，不受空間時間的拘束；但是做實驗的就不一樣了。因為你的實驗儀器就是在這裡，所以你的工作地點就是在這裡，像你如果一個小零件壞了，白天還好，你還可以叫你的助理，去把零件買回來。如果你在半夜，總不可能人家店都關了，還去把別人叫醒吧。所以你做實驗的你的作息時間，就有所限制，向上班族一樣朝九晚五之類的。

Q 6：如果要接觸非線性雷射需要哪些背景知識？

柯景元老師：你必須要先具備近代物理的知識，這是最基本的，再來比較進階的可能就是雷射物理。然後系上李孟恩老師開的課也可以去修修看，或者你們可以到中山大學去修有關雷射的課程，如果有點遠，科技學院電子系光通系的課，可以盡量去修，不要管系上有沒有承認這一個學分，反正重點就是學到這門課的知識。再不然就是靠自己自修。

Q 7：給物理系同學的建議

柯景元老師：像你們現在在修課，如果可以的話可以多修一點，眼界要看開一點，不用太侷限，對妳們是有好處沒有壞處的，因為妳們現在只是大學生而已，又不是專業的，所以不需要非常專業但是要開闊自己的眼界，你這樣以後才有機會做

出很新的東西，所以妳們現在常聽到什麼跨領域研究啦，有些人去做生物物理啦，像利老師就去做經濟物理，基本上這些跨領域研究都要有興趣做支撐，可以提供不同領域裡面的新方法，用物理方法來處理其他領域的現象，所以像你這階段最好是開闊一下眼界，當你看的東西夠多之後，你就會慢慢有自己的想法出來，然後要加強哪些地方，重點在哪裡就該要慢慢的練習，才能夠了解。

物理裡我覺得是一個學習的中繼站，你來到這邊就是要追尋你未來的方向，物理可以提供你一些思考的模式和一些方法，你可以把這套方法應用到不同的領域上面去，我認為物理還是滿基本的科學，裡面有一些思考問題的方式，是值得你們去學的。

非線性動力學

在非線性科學中，「混沌」這個詞的含義和本意相似但又不完全一致，非線性科學中的**混沌現象**指的是一種確定的但不可預測的運動狀態。所以讓我們先來講什麼是混沌(What is **CHAOS**)？

1.差之毫厘，失之千里、牽一髮而動全身。

一個小小初始條件的差異可以嚴重影響系統長期的大變化。(Just a small change in the initial conditions can drastically change the long-term behavior of a system.)

2.對初始條件的敏感性。

對原本西方的科學基本理念來說，「如果你正在計算檯面上的一顆撞球，就不用去理會室外一片樹葉的掉落。很輕微的影響可以被忽略，事物進行總會殊途同歸，任意的小干擾，並不致於膨脹到任意大的後果。」

但是混沌現象所指的是「一點點的初始條件差異，會造成事件往後行為的大大不同。」這就是「對於初始條件的敏感性」。

3.蝴蝶效應(Butterfly Effect)

(一隻在巴西的蝴蝶鼓翅飛翔，會在德州誘發一場龍捲風嗎？)

這是描述混沌效應最有名的一個名詞。六零年代麻省理工學院的氣象學家兼數學家勞倫茲(Edward Lorenz)教授，選擇了十幾條顯示出溫度、壓力、風速等氣象數值的方程式，在他自己的電腦裡創造了袖珍玩具般的天氣。有一天，發現僅是千分之一以下的誤差，對電腦裡的天氣來說，剛開始仍是跡近相同的兩個個案，但經過數個月後，逐漸差異越來越大，終至面目全非的地步。

勞倫茲說：「人們常覺得氣象的長期預報能辦得通的其中一個理由，是有些真實的物理現象我們可以預測得很好，像是日蝕、月蝕和海水潮汐，一般人看到我們既然能夠在數月以前把潮汐預報得蠻好，會說為什麼天氣的誤報卻屢見不鮮，僅僅是另一套流體系統，規則的複雜也大同小異，但我開始理解，任何不能遵守週期性規矩的系統皆難以預測。」

4.不規則之中仍存在秩序

混沌系統看似雜亂，但其之中仍存在規律性以及秩序。例如地球每天的天氣，存在於一個變化無窮的不可預報系統中一般，而氣候卻又呈現年復一年相當程度的規律性。數值只有在某些範圍內起落，但絕不超過固定的範圍。如果我們能掌握控制混沌系統的那隻手，我們是可以對短期的行為做出有效的預測的。

5.混沌理論

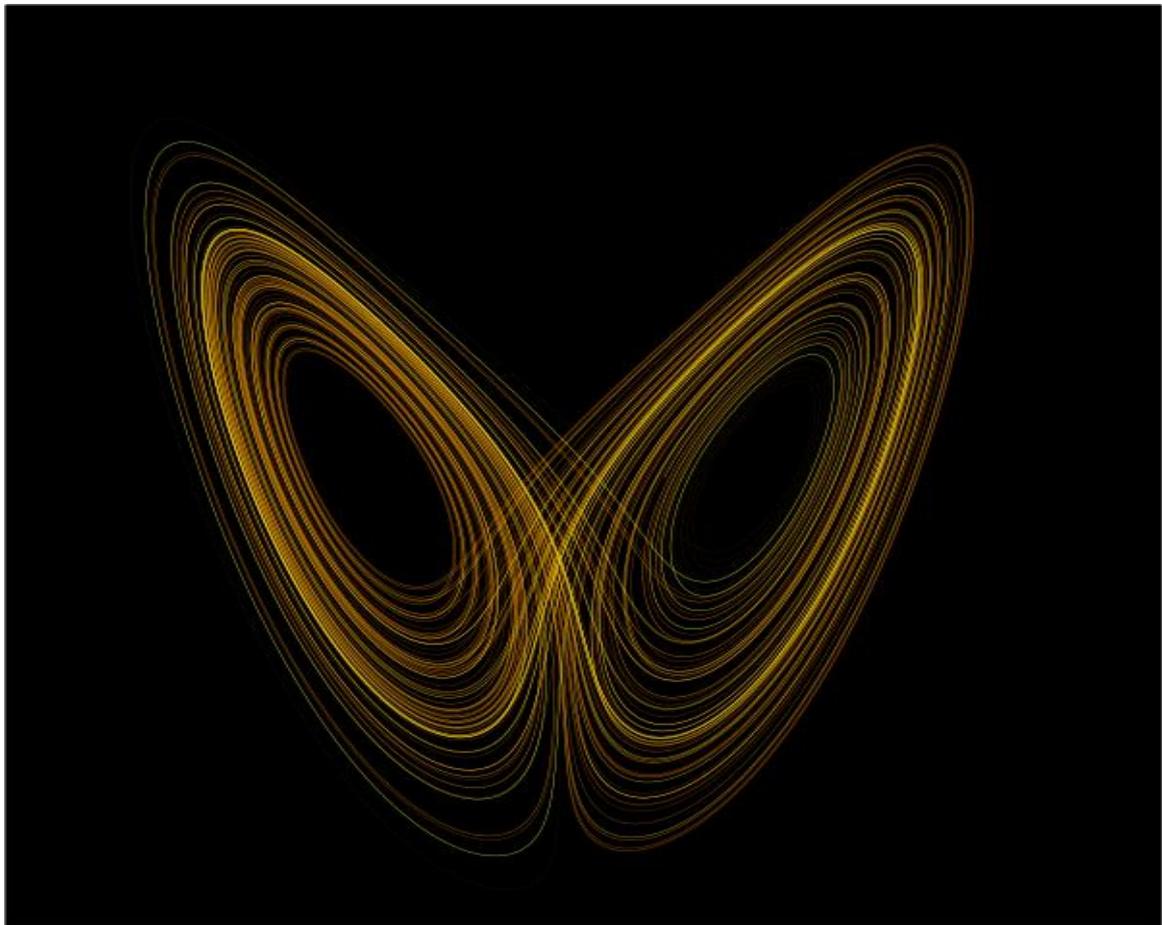
混沌在學術上是指雜亂無章的現象，一個確定的系統因隨機性產生複雜

不規則的狀態，研究此一現象的方法就叫混沌理論。混沌有幾種特質：非線性的、複雜型態的、耗散結構的、循環對稱、對初始狀態具高敏感度。

前面我們提到勞倫茲對於天氣現象的發現。根據勞倫茲的方程式，所有解都是不穩定且幾乎都是無週期性的；而任何一個無週期性的系統，都應該是不可預報的（unpredictability）。系統不會回到原來的狀態，所以也不會重複表現與過去一樣的狀態。雖然氣候可能顯現出大致類似的週期性，這些現象又決定了天氣，它不會回到完全相同的情況，但可能有有限度的類似。

6.混沌理論的重要性

混沌理論不只是一門數學的分支，它還可以擴展影響應用到許多層面，像是氣象系統、股票市場、生物數量的變化、大自然的圖像結構……等等。混沌理論彰顯了細微與隨機事件的重要性，並且對於現象之預測持表留態度，也讓我們了解非線性的系統僅能有限掌握。



上圖為著名的「勞倫茲吸子」(Lorenz attractor)。它顯示數據表面一團混亂下，仍有精緻且規律的結構。此圖中，三項變數的值可對應到三度空間的某定點，當系統演進，該點會隨之平滑地移動。若系統永遠不重覆自己，軌跡必須永遠不相互碰觸，且無止休的打圈子。雖然不重覆，但是軌跡會一直像是繞著這兩個圈圈一樣，就像是行為被一個圈圈吸過去。所以我們稱「勞倫茲吸子」。

勞倫茲方程式是基於納維－斯托克斯方程式、熱傳導方程式和連續性方程式簡化

得出，最初的形式為：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{g} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \vec{v}) &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla (T \vec{v}) &= \chi \nabla^2 T \\ \rho &= \rho_0 (1 - \gamma (T - T_0))\end{aligned}$$

v ——流速， T ——流體溫度， T_0 ——上限溫度（也可以寫成 $T_0 + \Delta T$ ）， ρ ——密度， p ——壓強， \vec{g} ——重力， γ 、 χ 、 ν ——依次為熱膨脹係數、熱擴散率和動黏滯係數。

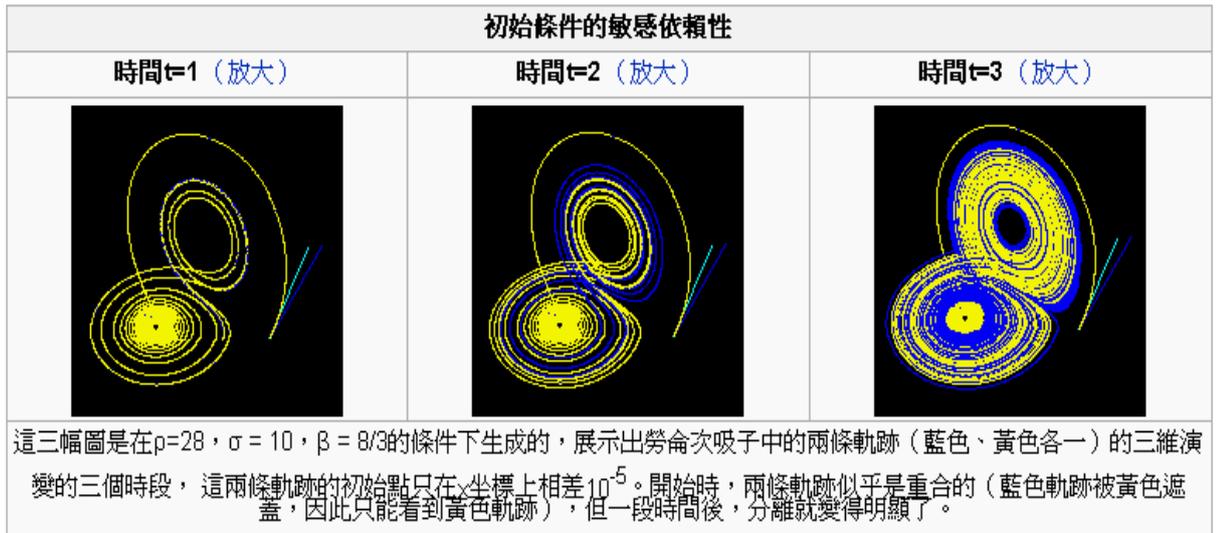
簡化後的形式稱為**勞侖次方程式**，是決定勞侖次振子狀態的方程式為一組常微分方程式：

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

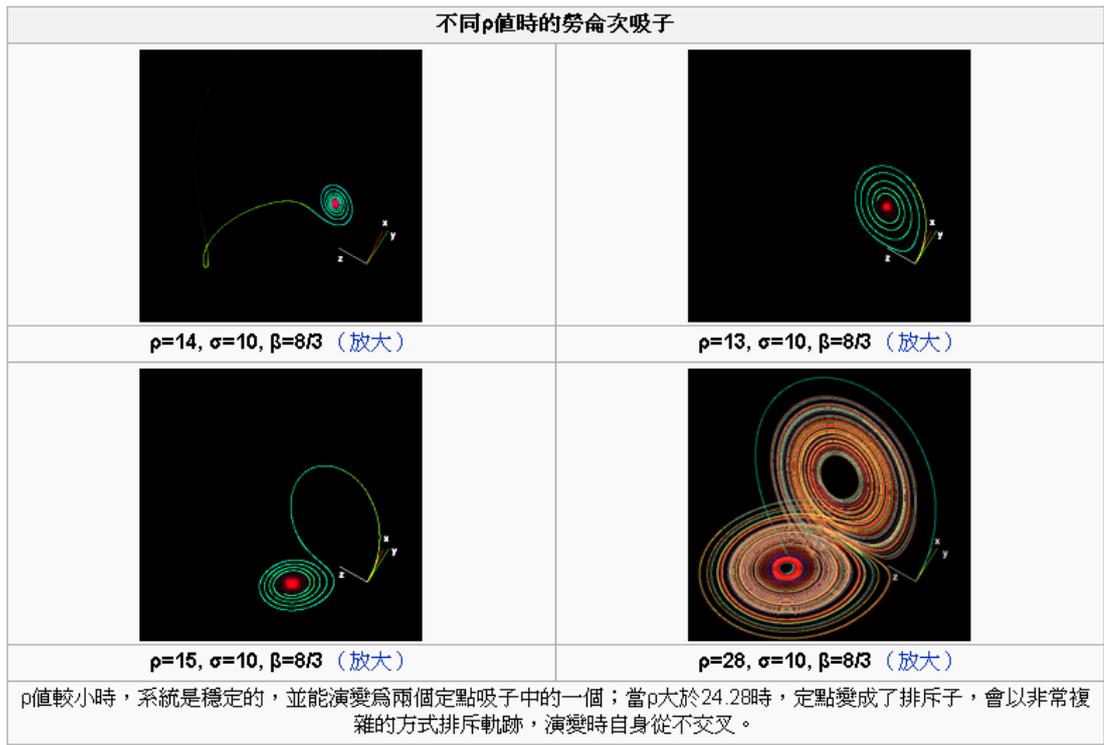
含時間參數的形式：

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \sigma(y(t) - x(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases}$$

σ 稱為**普蘭特爾數**， ρ 稱為**瑞立數**。所有的 σ ， ρ ， $\beta > 0$ ，但通常 $\sigma = 10$ ， $\beta = 8/3$ ， ρ 不定。若 $\rho < 1$ ，則吸子為原點，沒有任何其他穩定點。 $1 \leq \rho < 13.927$ 時，螺線軌跡接近兩點（這相當於存在阻尼振子），兩點的位置由下列式子決定： $x = \pm \sqrt{b(\rho - 1)}$ 、 $y = \pm \sqrt{b(\rho - 1)}$ 、 $z = \rho - 1$ ，系統在 $\rho = 28$ 時表現出混沌特性，但 ρ 為其他值時會顯示出具紐結的周期軌道。



ρ 瑞立數



混沌的重要法則：

疊代(Iterative)：

疊代是指將前次產生的值再重新代入本身的一種行為。從數學語言來看， $f(x_n)=x_{n+1}$ (在這之前最好要先定義 f 函數以及初始值 x_0)；在日常生活中，疊代的例子也是俯拾即是，例如陰晴變化的天氣系統、生物族群的數量變化

等等。而在某些條件下的疊代往往會造成混沌。

疊代方程式其中一個驚人的性質是對於初始條件的敏感。往往初始值僅有極小的差異，但在經過幾次的疊代之後，很快地兩個數列互相遠離，彷彿找不出任何關係。在混沌科學發展以前，科學家一直假設起始數據的小誤差也只會對往後的結果產生小影響。但是當我們使用疊代法時，小的誤差會很快地被放大。

碎形(fractal)(混沌世界的秩序)：

約七〇年代左右，數學家 Benoit Mandelbrot 在一篇幾乎算是他思想轉捩點的論文「英國的海岸線有多長？」中，發展出了新的維度觀念——幾何學：碎形。三十年間，碎形幾何，與混沌理論，複雜性科學共同匯合，試圖解釋過去科學家們所忽略的非線性現象，與大自然的複雜結構，把觸角伸入，除了物理、化學之外的生理學、經濟學、社會學、氣象學，乃至於天文學所談及的星體分布。搖身一變，碎形幾何已經變成了主要能描述大自然的幾何學了。這些研究開拓了人們對於維度、尺度、結構的新看法，特性大致歸納如下：

◆碎形具有分數維度：不同於整數維度的一維線段，二維矩形，碎形所具有的維度是分數的，例如無窮擴張三分之四的卡區曲線，其維度是 1.2618。

◆碎形具有尺度無關性：對於「同一個」碎形結構，以不同大小的量尺來量度「可觀察的區域」，碎形會具有一致的碎形維度。例如，如果我們不同程度地放大或縮小 Mandelbrot Set，我們會發現圖形的複雜度，或摺疊程度，或粗糙程度並未因此而改變。

◆碎形具有自我模仿性：對於「同一個」碎形結構，自我模仿就是尺度一層一層縮小的結構重複性，它們不僅在越來越小的尺度裡重複細節，而且是以某種固定的方式將細節縮小尺寸，造成某種循環重現的複雜現象。

◆碎形代表有限區域的無限結構：例如，卡區的雪花曲線，是一條無限長，而結構不斷重複的線段，被限制在最初三角形的正圓區域內。例如，原本是一固定線段的 Cantor Set，最後變成一系列數量無窮，但總長度卻為零的點集合。

◆碎形隱含一種整體性：我們可以從某一尺度的碎形，來推知另一尺度的「同一個」碎形的大致樣子，這意味著一種整體性，小細節的傾向可以透露大細節的傾向，大細節的絲毫改變可以令所有小細節全面改觀，再造成整個碎形圖形的變化。

◆碎形是觀察手段的相對結果：回到 Mandelbrot 的那篇論文「英國的海岸線有多長？」，作為碎形結構的海岸線本身，在某種意義下是無限長，但是對於不同的觀察者而言，海岸線長度卻端視其手中的量尺（不同的觀察手段）而定，

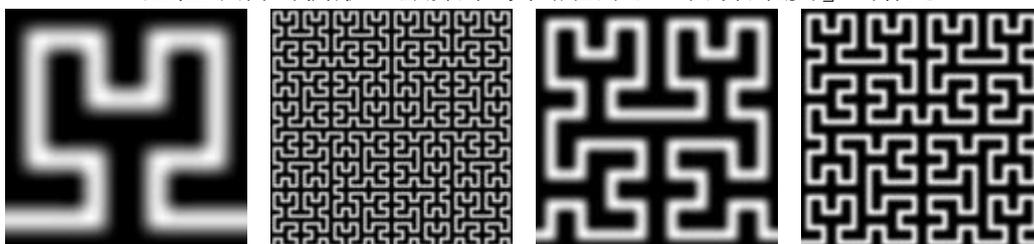
Mandelbrot 說：「數據結果是依觀察者與其對象而改變。」也正是這個觀念，才促使他發展出不同於過去科學家的維度量度的新理論。

◆碎形是非線性動力過程的結果：大自然的外貌、結構是非線性動力過程所造成的結果，我們也只能在非線性現象中，才能找到碎形的蹤跡，於是碎形幾何與非線性動力學有著密不可分的關係。

(1) 填充空間的曲線(Space-filling Curve)

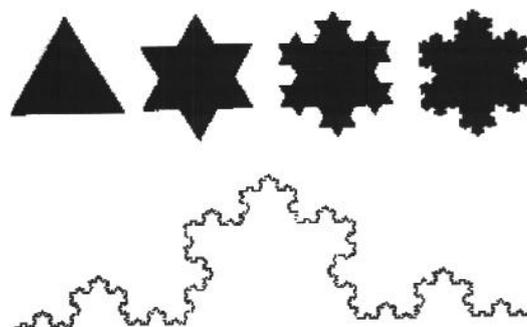
1890 年代，皮諾(Giuseppe Peano)發現了一種稱之為「填充空間的曲線」。一條曲線只不過是一段能彎曲變形的線條而已，我們也知道，一條線只是一維的。而此種曲線，用極其複雜的方式轉折扭曲，以至於可以將曲線所在的紙面完全填滿。在這個平面上，沒有一點是皮諾曲線畫不到的。所以，皮諾曲線是二維的嗎？

這種矛盾的情形，讓數學家開始有了「分數維度」的概念。



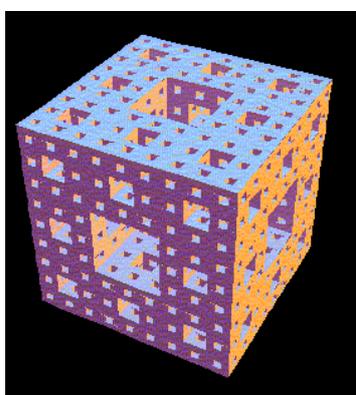
(2) 卡區曲線(Koch curve)。

卡曲曲線是由瑞典數學家范卡區(Helge von Koch)一九零四年首創。先從一個正三角形開始，每一次做轉換把每邊中間的三分之一的區域再貼上一塊新的正三角形，邊長為本來的三分之一的三角形。卡區曲線自己和自己不會碰撞在一起。另外，觀察它的每次變形，雖然增加了週邊上一些小三角形，但實際上包容的線面積仍是有所限制的，不會超過最原始三角型的外接圓。



再讓我們觀察他的邊長。每一次轉換，邊長為原邊長的三分之四倍，很明顯地，這個曲線的長度是無限長的。但是卡曲曲線是存在在有限的空間內。我們發現吊詭的是：有限的空間內有無限的邊長。

另外兩個類似的例子是(1)希爾平斯基地毯。從正方形開始製造地毯。先將地毯劃



分成 3 乘 3 共 9 個正方形，移除正中央的正方形，再於剩餘的 8 個正方形重複相同的過程，……，一直持續下去。邊長無限大，但面積為 0

(2)明吉海綿 --- 表面積無限大，但體積為 0(希爾平斯基地毯的立體版)。

日常生活中隨處可見碎形的例子。包括樹的結構、人體血管的脈絡、海岸線的形狀……等等。

非線性的應用:

非線性的應用可以說非常的廣泛，舉凡數學，生物學，資訊技術，經濟學，工程學，金融學，哲學，物理學，政治學，人口學，心理學和機器人學多種系統的渾沌狀態在實驗室中得到觀察，包括電路，雷射，流體的動態，以及機械和電磁裝置。在自然中進行的有對天氣，衛星運動，天體磁場，生態學中的種群增長，神經元中的動作電位和分子振動的觀察。渾沌理論最成功的應用之一在於生態學中的雷克動態綜合模型，在其中顯示了受密度制約之下的種群增長如何引致混沌狀態。

例如系上的柯景元老師就在在做非線性雷射動力學，利見興老師是做經濟物理這都是非線性的子領域，如果有對非線性有興趣的同學可以找柯老師跟利老師討論並加以研究其中的奧妙。

參考資料:

交大應數 96 級 張永潔 A Brief Introduction of Chaos

<http://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%B7%B7%E6%B2%8C%E7%90%86%E8%AE%BA>

<http://tinyurl.com/2eorf7v>

<http://www.atlas-zone.com/complex/fractals/index.html>

指導老師：柯景元 老師

監 製：黃俊豪

主 編：陳永源

發 行：國立高雄師範大學 物理學系 學術組

日 期：2010 年 6 月 初版